Exercice 3 :

On considère le polynôme P défini par :

$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1. Calcul de $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$ et factorisation de P

$P(i\sqrt{3}) = P(i\sqrt{3}) = 0$ donc il existe un polynôme Q de degré 2 tel que :

$P(z) = (z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3}).Q(z) = (z^2 + 3)Q(z)$.

Expression de Q(z)

$z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = (z^2 + 3)(z^2 + az + b)$ donc:

$z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = z^4 + az^3 + (b+3)z^2 + 3az + 3b$ donc:

$a = -6$; $b + 3 = 24$ donc $b = 21$ d'où :

$z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$

2. Résolution dans C de l'équation $P(z) = 0$.

D'après 1/ $P(z) = 0$ si $z = i\sqrt{3}$ ou $z = -i\sqrt{3}$ ou $z^2 - 6z + 21 = 0$ (E) le discriminant réduit de (E) est : $3 - 21 = -12 = (i2\sqrt{3})^2$ Donc il existe deux solutions de (E) : $Z_1 = 3 - 2i\sqrt{3}$; $Z_2 = 3 + 2i\sqrt{3}$;

$S_C = \{ i\sqrt{3} ; -i\sqrt{3} ; 3 - 2i\sqrt{3} ; 3 + 2i\sqrt{3} \}$

3.a) Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B, C, D d'affixes respectives :

$z_A = i\sqrt{3}$, $z_B = -i\sqrt{3}$, $z_C = 3 + i2\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z_C}$,

b)Les quatre points sont sur le même cercle.

$AC^2 = 3^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 = 12$; $AD^2 = 3^2 + (2\sqrt{3} + \sqrt{3})^2 = 36$;

$CD^2 = 48$

La réciproque du théorème de Pythagore nous affirme que : ACD est un triangle rectangle en A donc A ; D et C sont situés sur le cercle de diamètre [CD] ; les points A et B d'une part et C et D d'autre part sont symétriques par rapport à l'axe des réels. Donc les points B ; C et D sont sur le cercle de diamètre [CD] par suite les points A ;B ;C et D sont situés sur le même cercle (C) de diamètre [CD].

Qarray.tn - Aqra Bfeen - Qarray.tn